Utilisation d'un tableur dans l'Algorithme d'Euclide et la recherche du PGCD

Masset Camille – TSV2

le 1er décembre 2009

1 Calculer un PGCD à l'aide d'OpenOffice.org Calc

1. PGCD (37 352 ; 5 768) = 56.
2. PGCD (32 527 ; 5 591) = 1 (ces nombres sont premiers entre eux).
3. PGCD (5 175 846 ; 827 658) = 702.
4. PGCD (1 234 567 891 011 ; 10 000 000 000 007) = 1 (ces nombres sont premiers entre eux).

2 Conjecturer avec un tableur

2.1 PGCD de deux polynômes du premier degré

n désigne un entier naturel. On pose $a = 7n + 9$ et $b = 3n + 2$.

On se propose de déterminer PGCD $(a\,;b)$ suivant les valeurs de n.

Avec le tableur, on conjecture que si $n = 13k + 8$ $(k \in \mathbb{Z})$, alors PGCD $(a\,;b) = 13$ et que dans les autres cas, PGCD $(a\,;b) = 1$. Démontrons cette conjecture.

$$\begin{aligned}
\text{PGCD}\,(a\,;b) &= \text{PGCD}\,(7n+9\,;3n+2)\\
&= \text{PGCD}\,((7n+9)-2(3n+2)\,;3n+2)\\
&= \text{PGCD}\,(3n+2\,;n+5)\\
&= \text{PGCD}\,((3n+2)-3(n+5)\,;n+5)\\
&= \text{PGCD}\,(-13\,;n+5)\\
\text{PGCD}\,(a\,;b) &= \text{PGCD}\,(n+5\,;13)
\end{aligned}$$

De ce fait, si :

$$n+5 \equiv 0 \ \ [13] \Leftrightarrow n \equiv -5 \ \ [13] \Leftrightarrow n \equiv 8 \ \ [13]$$

alors, PGCD $(n + 5\,;13) =$ PGCD $(a\,;b) = 13$.

Dans les autres cas, a et b n'ont aucun diviseur commun excepté 1, donc PGCD $(a\,;b) = 1$.

2.2 PGCD de deux polynômes du second degré

n désigne toujours un entier naturel. On pose ici $a = 7n^2 + 4$ et $b = n^2 + 1$.

Montrons dans un premier temps que PGCD $(a\,;b) =$ PGCD $(n^2 + 1\,;3)$.

$$\begin{aligned}
\text{PGCD}\,(a\,;b) &= \text{PGCD}\left(7n^2+4\,;n^2+1\right)\\
&= \text{PGCD}\left((7n^2+4)-7(n^2+1)\,;n^2+1\right)\\
&= \text{PGCD}\left(-3\,;n^2+1\right)\\
\text{PGCD}\,(a\,;b) &= \text{PGCD}\left(n^2+1\,;3\right)
\end{aligned}$$

Les possibilités pour le PGCD de a et b sont donc celles pour lesquelles n^2+1 est multiple de 3. Pour cela, on résout dans $\mathbb{N}$ l'équation :

$$n^2+1 \equiv 0 \ [3]$$

Pour résoudre cette équation, on construit le tableau suivant :

$n \equiv$ ... $[3]$	0	1	2
$n^2+1 \equiv$ ... $[3]$	1	2	2

Par conséquent, il n'y a pas de solution entière naturelle à cette équation. De ce fait, n^2+1 n'est jamais multiple de 3, donc, pour tout entier naturel n, $\text{PGCD}\,(n^2+1\,;3) = \text{PGCD}\,(a\,;b) = 1$.

2.3 Comparer deux PGCD

- a et b sont deux entiers naturels non nuls.
- On pose $\text{A} = 3a+2b$ et $\text{B} = 7a+5b$.
- On conjecture que pour tout couple d'entiers naturels non nuls $(a\,;b)$, $\text{PGCD}\,(a\,;b) = \text{PGCD}\,(\text{A}\,;\text{B})$.
- Soit d un diviseur commun à a et b. On a :
  d divise a et d divise b, donc d divise toute combinaison linéaire de a et de b, d'où :
  * d divise $3a+2b = \text{A}$,
  * d divise $7a+5b = \text{B}$.
- Soit d' un diviseur commun à A et B. On a :
  d' divise A et d' divise B, donc d' divise toute combinaison linéaire de A et de B d'où :
  * d' divise $3\text{B}-7\text{A} = 21a+15b-21a-14b = b$,
  * d' divise $5\text{A}-2\text{B} = 15a+10b-14a-10b = a$.
- On a montré ainsi que si d est un diviseur commun à a et b, alors d divise A et B et réciproquement, si d' est un diviseur commun à A et B, alors d' divise a et b, par conséquent, on dispose de la relation suivante :

$$d \text{ divise } a \text{ et } b \Leftrightarrow d \text{ divise A et B}$$

- On peut ainsi conclure que $\text{PGCD}\,(a\,;b) = \text{PGCD}\,(\text{A}\,;\text{B})$.