

DM facultatif n° 1

MASSET Camille – TSV2

le 6 décembre 2009

Partie 1 Un premier encadrement de e

1. (a) Tout d'abord, je vais montrer que $1 + x \leq e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Pour cela, j'étudie les variations de la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x - (x + 1) \end{aligned}$$

Je dérive la fonction f et j'étudie le signe de $f'(x)$ pour déterminer les variations de f .

$$f(x) = e^x - (x + 1)$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

Je cherche pour quelle valeurs de x , $f'(x) > 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > e^0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Je cherche maintenant pour quelle(s) valeur(s) de x , $f(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$$

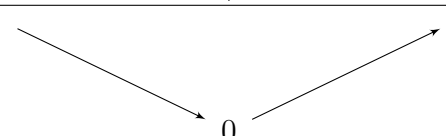
$$\Leftrightarrow e^x = e^0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Je peux maintenant déterminer les variations de f :

- $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ est croissante.
- $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante.
- $x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ le minimum de f est en 0.

On peut résumer ces variations dans un tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

Par conséquent :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \\ e^x - (x+1) &\geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} : x+1 &\leq e^x \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Maintenant, je vais montrer que pour $x < 1$, on a :

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

J'ai démontré à la question précédente que

$$\forall x \in \mathbb{R} : 1+x \leq e^x$$

Soit $x < 1$.

Je pose $X = -x$. Je peux affirmer que $X \in \mathbb{R}$.

La proposition suivante est donc vraie :

$$1+X \leq e^X$$

Donc :

$$\begin{aligned} 1-x &\leq e^{-x} \\ \underbrace{1-x}_{>0 \text{ car } x < 1} &\leq \underbrace{\frac{1}{e^x}}_{>0} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} 0 < 1-x &\leq \frac{1}{e^x} \\ \forall x < 1 : e^x &\leq \frac{1}{1-x} \end{aligned} \tag{2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Je vais encadrer e entre deux nombres afin de l'approcher.

(a) Je vais prouver que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq e$$

Pour cela, je pose $x = \frac{1}{n}$. Donc, dans ce cas, $x > 0$.

Selon l'inégalité (1), je peux affirmer que :

$$0 < 1 + \frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}}$$

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n, \text{ car } x \mapsto x^n \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+$$

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

(b) Je pose maintenant $x = \frac{1}{n+1}$. De même, $x > 0$.

Selon l'inégalité (2), je peux affirmer que :

$$0 < e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$$

$$0 < \left(e^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}$$

$$0 < e \leq \left(\frac{1}{\frac{n+1-1}{n+1}} \right)^{n+1}$$

$$0 < e \leq \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1}$$

$$0 < e \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

(c) Je sais maintenant que :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &\leq e \\ e &\leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

J'en déduis que :

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

(d) Avec un tableur, j'encadre e avec une précision de $1 \cdot 10^{-3}$, avec $n = 24$ (cf. feuille de tableur en annexe).

Partie 2 Un deuxième encadrement de e

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

Soient g et h les fonctions définies sur $I = [0; 1]$ par :

$$g(x) = e^{-x} \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

et $h(x) = g(x) + e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!}$

1. Par définition :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Donc, je peux en déduire que :

$$n! = n \times \underbrace{((n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1)}_{(n-1)!}$$

$$n! = n \times (n-1)!$$

2. Je vais ici étudier les variations de g et de h sur I .

(a) Étude préliminaire

Je pose $S_n(x)$:

$$S_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$S_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

et je dérive $S_n(x)$:

$$S'_n(x) = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}x + \frac{3}{3!}x^2 + \cdots + \frac{n}{n!}x^{n-1}$$

$$S'_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

(b) Variations de la fonction g .

Je sais que la fonction g est définie sur I par :

$$g(x) = e^{-x} \cdot S_n(x)$$

Je dérive la fonction g et j'étudie le signe de $g'(x)$ pour déterminer les variations de cette fonction.

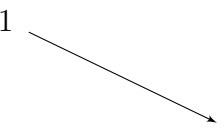
$$\begin{aligned} g'(x) &= (e^{-x})' \cdot S_n(x) + e^{-x} \cdot S'_n(x) \\ &= -e^{-x} \cdot S_n(x) + e^{-x} \cdot S'_n(x) \\ &= e^{-x} \cdot S'_n(x) - e^{-x} \cdot S_n(x) \\ &= e^{-x} \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!} \right) \\ g'(x) &= -e^{-x} \times \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Par définition, $e^{-x} > 0$, donc $-e^{-x} < 0$; et sachant que $x > 0$ et que $n \geq 2$, je peux affirmer que $\frac{x^n}{n!} > 0$, donc :

$$\forall x \in I : g'(x) < 0 \Leftrightarrow g \text{ est strictement décroissante sur } I$$

Si g est strictement décroissante sur I , alors son maximum se fait en 0.
Je peux calculer $g(0)$ pour compléter mon tableau de variations :

$$\begin{aligned} g(0) &= e^0 \cdot \left(1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots + \frac{0^n}{n!} \right) \\ &= 1 \times (1 + 0 + 0 + \cdots + 0) \\ g(0) &= 1 \end{aligned}$$

x	0	1
$g'(x)$	-	
g	1	

Le maximum de g sur I est donc 1.

(c) Variations de la fonction h .

Je sais que la fonction h est définie sur I par :

$$h(x) = g(x) + e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Je dérive la fonction h et j'étudie le signe de $h'(x)$ pour déterminer les variations de cette fonction.

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x) + (e^{-x})' \times \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \times \left(\frac{x^n}{n!} \right)' \\ &= -e^{-x} \times \frac{x^n}{n!} - e^{-x} \times \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \times \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-x} \cdot \left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!} - \frac{x^n}{n!} \right) \\ &= e^{-x} \cdot \left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{2x^n}{n!} \right) \\ &= e^{-x} \cdot \left(\frac{nx^{n-1} - 2x^n}{n!} \right) \\ h'(x) &= e^{-x} \cdot \left(\frac{x^{n-1}(n-2x)}{n!} \right) \end{aligned}$$

Par définition, $e^{-x} > 0$, et de même, $n! > 0$.

Comme $x \in I \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$, je peux affirmer que $0 \leq x^{n-1} \leq 1$, donc $0 \leq 2x^{n-1}$.

Enfin, comme je dispose des inégalités suivantes :

$$2 \leq n$$

$$0 \leq x \leq 1$$

je peux affirmer que :

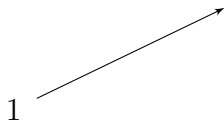
$$0 < 2 \leq n - 2x$$

Par conséquent, $\forall x \in I : h'(x) > 0 \Leftrightarrow h$ est strictement croissante sur I .

Si h est strictement croissante sur I , alors son minimum se fait en 0.

Je peux calculer $h(0)$ pour compléter mon tableau de variations :

$$\begin{aligned} h(0) &= g(0) + e^0 \times \frac{0^n}{n!} \\ &= 1 + 1 \times 0 \\ h(0) &= 1 \end{aligned}$$

x	0	1
$h'(x)$	+	
h		

Le minimum de h sur I est donc 1.

3. J'ai montré à la question précédente que le maximum de g sur I était 1, atteint en $x = 0$, donc

$$\forall x \in J =]0; 1] : g(x) < 1$$

or $1 \in J$, donc $g(1) < 1$.

De même, le minimum de g sur I est 1, atteint en $x = 0$. Par conséquent,

$$\forall x \in J =]0; 1] : h(x) > 1$$

or $1 \in J$, donc $h(1) > 1$.

4. De la question précédente, je peux déduire deux inégalités :

Tout d'abord :

$$\begin{aligned} g(1) &< 1 \\ \frac{1}{e^1} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) &< 1 \\ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} &< e \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} h(1) &> 1 \\ \frac{1}{e^1} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \right) &> 1 \\ e &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Je peux donc encadrer le nombre e :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \quad (3)$$

5. À l'aide du logiciel Mathematica 5, je peux calculer le nombre suivant avec une précision de 30 décimales :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{24!} - e = -6,704\ 433\ 289\ 009\ 259\ 497\ 720\ 932\ 214\ 77 \cdot 10^{-26}$$

Donc, lorsque $n = 24$, on approche e avec une précision de l'ordre de 10^{-26} !!! C'est donc une excellente valeur considérant 24 comme un nombre « petit ». Si on choisissait $n = 50$, on dépasse la précision interne de Mathematica...

Partie 3 Où l'on démontre l'irrationalité de e

On suppose que e est un nombre rationnel, donc qu'il existe deux entiers p et q tels que :

$$e = \frac{p}{q}$$

(sachant que e est positif, on peut choisir deux entiers naturels).

1. Je vais montrer que e n'est pas un entier.

Je multiplie l'inégalité (3) par $n!$.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$$

$$n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} < n!e < n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{n!}$$

$$n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1 < n!e < n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1 + 1$$

Sachant que pour tout entier n et tout entier k tels que $k \leq n$, $k!$ divise $n!$, je peux dire que les nombres $\frac{n!}{k!}$ de l'inégalité sont des entiers.

Je pose :

$$a_n = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1$$

J'obtiens alors :

$$a_n < n!e < a_n + 1$$

Comme $a_n \in \mathbb{N}$, le nombre $n!e$ est compris strictement entre deux nombres entiers consécutifs a_n et $a_n + 1$, donc $n!e$ n'est pas un entier.

Si $n!e$ n'est pas un entier, e n'est pas un entier car $n!$ est un entier (puisque c'est un produit d'entiers).

2. Je vais prouver que $q \leq n$ est impossible.

Je sais que $n! \cdot \frac{p}{q}$ n'est pas entier. Si $q \leq n$, alors q divise $n!$, donc $n! \cdot \frac{p}{q}$ est entier dans ce cas.

On est face à une contradiction.

Finalement, $q \leq n$ est impossible.

3. Si $q \leq n$ est impossible, alors $q > n$ est vrai, quelque soit la valeur de l'entier n .

Cependant, $q > n$ est également impossible, car cela signifie que q est supérieur à tout n , donc que q majore l'ensemble \mathbb{N} , ce qui est impossible.

De cette manière, il n'existe pas d'entiers p et q qui vérifient $e = \frac{p}{q}$, donc e est irrationnel¹.

1. et même transcendant !!!