# DM facultatif n° 1

MASSET Camille – TSV2

le 6 décembre 2009

## Partie 1 Un premier encadrement de e

1. (a) Tout d'abord, je vais montrer que $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x, \forall x \in \mathbb{R}$.
Pour cela, j'étudie les variations de la fonction $f$ définie par :

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathrm{e}^x - (x+1) \end{aligned}$$

Je dérive la fonction $f$ et j'étudie le signe de $f'(x)$ pour déterminer les variations de $f$.

$$f(x) = \mathrm{e}^x - (x+1)$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

Je cherche pour quelle valeurs de $x$, $f'(x) > 0$ :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \\ f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

Je cherche maintenant pour quelle(s) valeur(s) de $x$, $f(x) = 0$ :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \\ f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Je peux maintenant déterminer les variations de $f$ :
- $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ est croissante.
- $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante.
- $x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ le minimum de $f$ est en 0.

On peut résumer ces variations dans un tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Par conséquent :

$$f(x) \geqslant 0$$

$$\mathrm{e}^x - (x+1) \geqslant 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon x + 1 \leqslant \mathrm{e}^x \tag{1}$$

(b) Maintenant, je vais montrer que pour $x < 1$, on a :

$$\mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x}$$

J'ai démontré à la question précédente que

$$\forall x \in \mathbb{R} : 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$$

Soit $x < 1$.
Je pose $\mathrm{X} = -x$. Je peux affirmer que $\mathrm{X} \in \mathbb{R}$.
La proposition suivante est donc vraie :

$$1 + \mathrm{X} \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{X}}$$

Donc :

$$1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

$$\underbrace{1-x}_{>0 \text{ car } x<1} \leqslant \underbrace{\frac{1}{\mathrm{e}^x}}_{>0}$$

Par conséquent :

$$0 < 1 - x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

$$\forall x < 1 : \mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x} \tag{2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Je vais encadrer e entre deux nombres afin de l'approcher.
   (a) Je vais prouver que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \mathrm{e}$$

Pour cela, je pose $x = \frac{1}{n}$. Donc, dans ce cas, $x > 0$.
Selon l'inégalité (1), je peux affirmer que :

$$0 < 1 + \frac{1}{n} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$$

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n, \text{ car } x \mapsto x^n \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+$$

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

   (b) Je pose maintenant $x = \frac{1}{n+1}$. De même, $x > 0$.
Selon l'inégalité (2), je peux affirmer que :

$$0 < \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$$

$$0 < \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}$$

$$0 < \mathrm{e} \leqslant \left(\frac{1}{\frac{n+1-1}{n+1}}\right)^{n+1}$$

$$0 < \mathrm{e} \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$0 < \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(c) Je sais maintenant que :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leqslant \mathrm{e}$$

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

J'en déduis que :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(d) Avec un tableau, j'encadre e avec une précision de $1 \cdot 10^{-3}$, avec $n = 24$ (cf. feuille de tableur en annexe).

# Partie 2 Un deuxième encadrement de e

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
Soient $g$ et $h$ les fonctions définies sur $\mathrm{I} = [0\,;1]$ par :

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \\ \text{et } h(x) &= g(x) + \mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

1. Par définition :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Donc, je peux en déduire que :

$$n! = n \times \underbrace{((n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1)}_{(n-1)!}$$

$$n! = n \times (n-1)!$$

2. Je vais ici étudier les variations de $g$ et de $h$ sur I.
   (a) Étude préliminaire
   Je pose $\mathrm{S}_n(x)$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n(x) &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ \mathrm{S}_n(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \end{aligned}$$

   et je dérive $\mathrm{S}_n(x)$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}'_n(x) &= 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}x + \frac{3}{3!}x^2 + \ldots \frac{n}{n!}x^{n-1} \\ \mathrm{S}'_n(x) &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

   (b) Variations de la fonction $g$.
   Je sais que la fonction $g$ est définie sur I par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{S}_n(x)$$

   Je dérive la fonction $g$ et j'étudie le signe de $g'(x)$ pour déterminer les variations de cette fonction.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\mathrm{e}^{-x}\right)' \cdot \mathrm{S}_n(x) + \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{S}'_n(x) \\ &= -\mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{S}_n(x) + \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{S}'_n(x) \\ &= \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{S}'_n(x) - \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{S}_n(x) \\ &= \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}\right) \\ g'(x) &= -\mathrm{e}^{-x} \times \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Par définition, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $-\mathrm{e}^{-x} < 0$ ; et sachant que $x > 0$ et que $n \geqslant 2$, je peux affirmer que $\frac{x^n}{n!} > 0$, donc :

$$\forall x \in \mathrm{I} : g'(x) < 0 \Leftrightarrow g \text{ est strictement décroissante sur I}$$

Si $g$ est strictement décroissante sur I, alors son maximum se fait en 0.
Je peux calculer $g(0)$ pour compléter mon tableau de variations :

$$\begin{aligned} g(0) &= \mathrm{e}^0 \cdot \left(1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots + \frac{0^n}{n!}\right) \\ &= 1 \times (1 + 0 + 0 + \cdots + 0) \\ g(0) &= 1 \end{aligned}$$

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | |
| $g$ | $1 \searrow$ | |

Le maximum de $g$ sur I est donc 1.

(c) Variations de la fonction $h$.
Je sais que la fonction $h$ est définie sur I par :

$$h(x) = g(x) + \mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Je dérive la fonction $h$ et j'étudie le signe de $h'(x)$ pour déterminer les variations de cette fonction.

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x) + (\mathrm{e}^{-x})' \times \frac{x^n}{n!} + \mathrm{e}^{-x} \times \left(\frac{x^n}{n!}\right)' \\ &= -\mathrm{e}^{-x} \times \frac{x^n}{n!} - \mathrm{e}^{-x} \times \frac{x^n}{n!} + \mathrm{e}^{-x} \times \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!} - \frac{x^n}{n!}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{2x^n}{n!}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(\frac{nx^{n-1} - 2x^n}{n!}\right) \\ h'(x) &= \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(\frac{x^{n-1}(n - 2x)}{n!}\right) \end{aligned}$$

Par définition, $e^{-x} > 0$, et de même, $n! > 0$.
Comme $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$, je peux affirmer que $0 \leqslant x^{n-1} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant 2x^{n-1}$.
Enfin, comme je dispose des inégalités suivantes :

$$2 \leqslant n$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

je peux affirmer que :

$$0 < 2 \leqslant n - 2x$$

Par conséquent, $\forall x \in \mathrm{I} : h'(x) > 0 \Leftrightarrow h$ est strictement croissante sur I.

Si $h$ est strictement croissante sur I, alors son minimum se fait en 0.
Je peux calculer $h(0)$ pour compléter mon tableau de variations :

$$\begin{aligned} h(0) &= g(0) + \mathrm{e}^0 \times \frac{0^n}{n!} \\ &= 1 + 1 \times 0 \\ h(0) &= 1 \end{aligned}$$

| $x$ | $0 \qquad\qquad 1$ |
|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ |
| $h$ | $1 \nearrow$ |

Le minimum de $h$ sur I est donc 1.

3. J'ai montré à la question précédente que le maximum de $g$ sur I était 1, atteint en $x = 0$, donc

$$\forall x \in \mathrm{J} = ]0\,;1]\ : g(x) < 1$$

or $1 \in \mathrm{J}$, donc $g(1) < 1$.
De même, le minimum de $g$ sur I est 1, atteint en $x = 0$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathrm{J} = ]0\,;1]\ : h(x) > 1$$

or $1 \in \mathrm{J}$, donc $h(1) > 1$.

4. De la question précédente, je peux déduire deux inégalités :
Tout d'abord :

$$\begin{gathered} g(1) < 1 \\ \frac{1}{\mathrm{e}^1}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < 1 \\ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \mathrm{e} \end{gathered}$$

et :

$$\begin{gathered} h(1) > 1 \\ \frac{1}{\mathrm{e}^1}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}\right) > 1 \\ \mathrm{e} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \end{gathered}$$

Je peux donc encadrer le nombre e :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \mathrm{e} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \tag{3}$$

5. À l'aide du logiciel Mathematica 5, je peux calculer le nombre suivant avec une précision de 30 décimales :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{24!} - \mathrm{e} = -6{,}704\,433\,289\,009\,259\,497\,720\,932\,214\,77 \cdot 10^{-26}$$

   Donc, lorsque $n = 24$, on approche e avec une précision de l'ordre de $10^{-26}$ ! ! ! C'est donc une excellente valeur considérant 24 comme un nombre « petit ». Si on choisissait $n = 50$, on dépasse la précision interne de Mathematica...

# Partie 3 Où l'on démontre l'irrationalité de e

On suppose que e est un nombre rationnel, donc qu'il existe deux entiers $p$ et $q$ tels que :

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q}$$

(sachant que e est positif, on peut choisir deux entiers naturels).

1. Je vais montrer que e n'est pas un entier.
   Je multiplie l'inégalité (3) par $n!$.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \mathrm{e} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$$

$$n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} < n!\mathrm{e} < n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{n!}$$

$$n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1 < n!\mathrm{e} < n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1 + 1$$

   Sachant que pour tout entier $n$ et tout entier $k$ tels que $k \leqslant n$, $k!$ divise $n!$, je peux dire que les nombres $\frac{n!}{k!}$ de l'inégalité sont des entiers.
   Je pose :

$$a_n = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1$$

   J'obtiens alors :

$$a_n < n!\mathrm{e} < a_n + 1$$

   Comme $a_n \in \mathbb{N}$, le nombre $n!\mathrm{e}$ est compris strictement entre deux nombres entiers consécutifs $a_n$ et $a_n + 1$, donc $n!\mathrm{e}$ n'est pas un entier.

   Si $n!\mathrm{e}$ n'est pas un entier, e n'est pas un entier car $n!$ est un entier (puisque c'est un produit d'entiers).

2. Je vais prouver que $q \leqslant n$ est impossible.
   Je sais que $n! \cdot \frac{p}{q}$ n'est pas entier. Si $q \leqslant n$, alors $q$ divise $n!$, donc $n! \cdot \frac{p}{q}$ est entier dans ce cas.
   On est face à une contradiction.
   Finalement, $q \leqslant n$ est impossible.

3. Si $q \leqslant n$ est impossible, alors $q > n$ est vrai, quelque soit la valeur de l'entier $n$.
   Cependant, $q > n$ est également impossible, car cela signifie que $q$ est supérieur à tout $n$, donc que $q$ majore l'ensemble $\mathbb{N}$, ce qui est impossible.
   De cette manière, il n'existe pas d'entiers $p$ et $q$ qui vérifient $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, donc e est irrationnel[1].

1. et même transcendant !!!